Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1002: Cálculo Diferencial e Integral 2022-2

Control 1

P1. Estudie completamente la función

$$f(x) = x \cdot \exp\left(\frac{4}{x+1}\right)$$

indicando:

a) **(1.5 ptos.)** Dominio, ceros, asíntotas,

b) **(2 ptos.)** continuidad, $f'(x)$, máximos, mínimos, crecimientos,

c) **(1.5 ptos.)** $f''(x)$, convexidad, inflexiones,

d) **(1 pto.)** gráfico y Recorrido.

P2. a) **(3 ptos.)** Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 5x^2 + Ax^{-5}$, donde $A > 0$. Demuestre que f es convexa en $(0, \infty)$, determine su punto de mínimo global x_0 y calcule el valor de A para que $\min\{f(x) : x \in (0, \infty)\} = 28$.

b) **(3 ptos.)** Determine el polinomo de Taylor de orden 2 (o grado 2, o $T_2(x)$) para la función

$$g(x) = \sqrt{1+x}$$

en torno a $\bar{x} = 0$ y demuestre que si $x > 0$, este polinomio aproxima a $g(x)$ con un error menor que $\frac{1}{16}|x|^3$

P3. a) **(3 ptos.)** Sean f, g dos funciones derivables en $\mathbb{R}$ y tales que

$$f'(x) = g(x) \quad \text{y} \quad g'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Si además $f(0) = 2$ y $g(0) = 0$, demuestre que

$$f^2(x) - g^2(x) = 4 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

b) **(3 ptos.)** Sea $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0, 1]$, dos veces derivable en $(0, 1)$ con

$$h(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2},\ h(1) = 1 \text{ y } h'(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}.$$

Use TVM y TVI apropiadamente, para demostrar que existe $\xi \in (0, 1)$ tal que $h'(\xi) = \frac{3}{\pi}$.

Tiempo: 3:00 horas.