Pauta de corrección Control 1

P1. Estudie completamente la función $f(x) = x \cdot \exp\left(\frac{4}{x+1}\right)$ indicando:

a) **(1.5 ptos.)** Dominio, ceros, asíntotas,

Solución: Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. 0.3

Ceros: $x = 0$ 0.2

Asíntotas:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \pm\infty \\
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= 1 \\
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to\pm\infty} x\left\{\exp\left(\frac{4}{x+1}\right) - 1\right\}; \qquad u = \frac{4}{x+1} \to 0 \ \ (u \neq 0) \\
&= \lim_{u\to 0^\pm} (4-u)\left\{\frac{\exp(u) - 1}{u}\right\}; \qquad x = \frac{4-u}{u} \\
&= 4 \\
\lim_{x\to -1^+} f(x) &= -\infty \\
\lim_{x\to -1^-} f(x) &= 0
\end{aligned}$$

(puntajes: 0.2, 0.3, 0.3, 0.2)

Tiene asíntota oblicua $y = x + 4$ y vertical $x = -1$, (por la derecha de -1).

b) **(2 ptos.)** continuidad, $f'(x)$, máximos, mínimos, crecimientos,

Solución:

Continuidad: Es continua en todo su dominio, por composición y producto de funciones continuas. 0.5

Primera Derivada:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \exp\left(\frac{4}{x+1}\right) + x\exp\left(\frac{4}{x+1}\right)\cdot\frac{-4}{(x+1)^2} \\
&= \exp\left(\frac{4}{x+1}\right)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

1.0

Es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, \infty)$ (sin máximos ni mínimos). 0.5

c) (1.5 ptos.) $f''(x)$, convexidad, inflexiones,

Solución:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \exp\left(\frac{4}{x+1}\right)\frac{(-4)}{(x+1)^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \exp\left(\frac{4}{x+1}\right)2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{2}{(x+1)^2}\right) \\ &= 8\frac{(x-1)}{(x+1)^4}\exp\left(\frac{4}{x+1}\right) \end{aligned}$$ 0.8

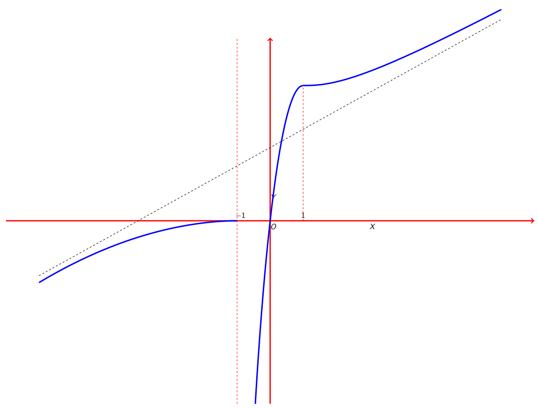
f es convexa en $[1,\infty)$ y es concava en $(-\infty,-1)$ y en $(-1,1]$. 0.5

f tiene una inflexión en $x=1$. ($f(1)=e^2$) 0.2

d) (1 pto.) gráfico y Recorrido.

Solución:

Gráfico:



0.5

Recorrido: $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$. 0.5

P2. a) (3 ptos.) Sea $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=5x^2+Ax^{-5}$, donde $A>0$. Demuestre que f es convexa en $(0,\infty)$, determine su punto de mínimo global x_0 y calcule el valor de A para que $\min\{f(x): x\in(0,\infty)\}=28$.

Solución: Claramente:

$$f'(x)=10x-5Ax^{-6} \qquad \text{y} \qquad f''(x)=10+30Ax^{-7}.$$ 1.0

Como $A>0$, resulta que $f''(x)>0$ en $(0,\infty)$, de donde se obtiene la convexidad. 0.5
Además, como $f'(x)=5x^{-6}(2x^7-A)$, se tiene que $f'(x)=0$ solo en $x_0=\sqrt[7]{A/2}$, $f'(x)<0$ para $x\in(0,x_0)$ y $f'(x)>0$ para $x\in(x_0,\infty)$. Por lo que $x_0=\sqrt[7]{A/2}$ es el mínimo global de f.

0.5

Para obtener la última condición, se debe resolver la ecuación

$$f(x_0)=28 \iff x_0^{-5}(5x_0^7+A)=28 \iff \left(\frac{A}{2}\right)^{-5/7}\left(7\frac{A}{2}\right)=28 \iff \left(\frac{A}{2}\right)^{2/7}=4$$

De donde se obtiene $A=256$. 1.0

b) **(3 ptos.)** Determine el polinomo de Taylor de orden 2 (o grado 2, o $T_2(x)$) para la función $g(x) = \sqrt{1+x}$ en torno a $\bar{x} = 0$ y demuestre que si $x > 0$, este polinomio aproxima a $g(x)$ con un error menor que $\frac{1}{16}|x|^3$

Solución: Claramente:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{1+x} & g(0) &= 1 \\ g'(x) &= \tfrac{1}{2}(1+x)^{-1/2} & g'(0) &= \tfrac{1}{2} \\ g''(x) &= -\tfrac{1}{4}(1+x)^{-3/2} & g''(0) &= -\tfrac{1}{4} \\ g'''(x) &= \tfrac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \end{aligned}$$

1.0

Por lo tanto,

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

0.5

y

$$g(x) - T_2(x) = \frac{1}{16}(1+\xi)^{-5/2}x^3, \qquad \text{donde } \xi \text{ está entre } 0 \text{ y } x.$$

1.0

Si $x > 0$, el error de aproximación se acota por $\frac{1}{16}x^3$

0.5

P3. a) (3 ptos.) Sean f, g dos funciones derivables en $\mathbb{R}$ y tales que $f'(x) = g(x)$ y $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si además $f(0) = 2$ y $g(0) = 0$, demuestre que $f^2(x) - g^2(x) = 4$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución: Sea $h(x) = f^2(x) - g^2(x)$. Claramente:

$$h'(x) = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0.$$

1.0

Por lo tanto $h(x)$ es constante en $\mathbb{R}$.

1.0

Evaluando en $x = 0$, la constante vale 4.

1.0

b) **(3 ptos.)** Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,1]$, dos veces derivable en $(0,1)$ con $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $h(1) = 1$ y $h'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
Use TVM y TVI apropiadamente, para demostrar que existe $\xi \in (0,1)$ tal que $h'(\xi) = \frac{3}{\pi}$.

Solución: Como h es continua en $[\frac{1}{2}, 1]$ y derivable en $(\frac{1}{2}, 1)$, entonces por TVM, existe $\xi_1 \in (\frac{1}{2}, 1)$ tal que $h'(\xi_1) = 1$.

1.5

Como h' es continua en $[\frac{1}{2}, \xi_1]$ y $h'(\frac{1}{2}) < \frac{3}{\pi} < h'(\xi_1)$, por TVI, existe $\xi \in (\frac{1}{2}, \xi_1)$ donde $h'(\xi) = \frac{3}{\pi}$.
Claramente $\xi \in (0,1)$.

1.5