Control 2.

P1. De las siguientes integrales resuelva sólo tres de ellas, por favor no entregue más de 3, no se corregirán: Cada una de las integrales tiene 2 puntos asignados.

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}dx$

b) $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}dx$

e) $\displaystyle\int \ln(1+x^2)dx$

P2. Usando sumas de Riemann de alguna función apropiada exprese como integrales los siguientes límites y luego calcule:

a) (3 puntos) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(n+i)-\ln(n)$

b) (3 puntos) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{2i}{n})^4-(\frac{10i}{n})^2$

P3. (6 puntos) Decida si la función f es Riemann integrable y demuestre su respuesta, elija sólo uno de los dos ejercicios:

a) Sea $f:[1,a]\longrightarrow\mathbb{R}, a\in\mathbb{N}, a>1$

$$f(x)=\begin{cases} 2x & x\notin\mathbb{N} \\ x & x\in\mathbb{N}\end{cases}$$

b) Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}, a<b$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\notin\mathbb{Q} \\ 1 & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

Duración: 3 horas.

P1 -

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}\,dx =$

haciendo el cambio de variable

$u = e^x$

$du = e^x dx$

+0.3

tenemos

$$u^2+2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot u+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}$$

$$\int \frac{du}{u^2+u+1} = \int \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

+0.4

haciendo un nuevo cambio de variables

sea

$s = u+\frac{1}{2} \qquad ds = du$

$$\int \frac{ds}{s^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{1}{\frac{4}{3}s^2+1}\ \frac{4}{3}\,ds$$

+0.3

sea $y = \frac{2s}{\sqrt{3}}$ $\quad dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\, ds$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{y^2+1}\, dy \;\Big|\; = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(y) + c$$

+0.3 +0.4

$$= \dots = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2(u+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

+0.3

b) $\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx)\, dx$

sea $f'(x) = e^{ax} \implies f = \frac{1}{a} e^{ax}$

$g(x) = \operatorname{sen}(bx) \implies g' = b\cos(bx)$

+0.3

integrando por partes:

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \operatorname{sen}(bx) - \int \frac{b}{a} e^{ax} \cdot \cos(bx)\, dx$$

+0.4

integrando nuevamente por partes:

$$\frac{1}{a} e^{ax} \cdot \operatorname{sen}(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cdot \cos(bx)\, dx$$

$$f'(x) = e^{ax} \implies f = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$g(x) = \cos(bx) \implies g'(x) = -b \operatorname{sen}(bx)$$

+0.3

luego

$$* = \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \operatorname{sen}(bx) - \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \int \frac{b}{a} e^{ax} \operatorname{sen}(bx) \right)$$

+0.3

Finalmente:

$$\int e^{ax} \sin(bx)\, dx = \frac{e^{ax} \sin(bx)}{a} - \frac{b e^{ax} \cos(bx)}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin(bx)\, dx$$

+0.3
(a medio camino)

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}\sin(bx)}{a} - \frac{b e^{ax}\cos(bx)}{a^2}$$

$$- \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}\sin(bx)}{a} - \frac{b e^{ax}\cos(bx)}{a^2}$$

$$\Rightarrow \int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)a}\left(\sin(bx) - \frac{b}{a}\cos(bx)\right)$$

$+ C$

+0.4

(Conclusye)

c) $\displaystyle\int \underbrace{\frac{x}{(1+x^2)(1+x)}} dx$ Usaremos fracciones parciales:

$$\frac{Ax+b}{(1+x^2)} + \frac{C}{(1+x)} = \frac{Ax+b+Ax^2+bx+C+Cx^2}{(1+x^2)(1+x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+b=1 \\ b+C=0 \Rightarrow b=-C \\ A+C=0 \Rightarrow A=-C \end{cases} \Rightarrow -2C=1 \Rightarrow C=-1/2$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}x+1/2}{(1+x^2)} + \frac{-1/2}{(1+x)} dx$$

Fracc. parciales o similar 0.5

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{x}{1+x^2}} + \underbrace{\frac{1}{1+x^2}} - \underbrace{\frac{1}{1+x}} dx$$

usando $u=1+x^2$, $du=2x\,dx$ $= \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ +0.5

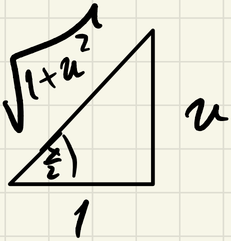
$\arctan(x)$ +0.5 (conocida)

usando $u=1+x$, $du=dx$ $=\ln(|1+x|)$ +0.5

$$= \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(|1+x|) + C$$

d) $\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx$, Cambio $\tan(\frac{x}{2}) = u$

$$dx = \frac{2\,du}{1+u^2}$$



$$\Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\Rightarrow \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$$

+1.0

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{\cancel{1+u^2}}{\cancel{2}u} \cdot \frac{\cancel{2}\,du}{\cancel{1+u^2}} = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln(|u|) + C$$

$$= \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + C$$

+1.0

e) $\int \ln(1+x^2)\,dx$ por partes $u = \ln(1+x^2)$

$dv = dx$

$\Rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$v = x$

+0.5

$$\Rightarrow \int \ln(1+x^2)\,dx = \ln(1+x^2)\,x - \underbrace{\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx}_{I}$$

+0.5

$$I = 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = 2\left[\int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx\right]$$

$$= 2\left[\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}\right] = 2[1 - \arctan(x)]$$

$$\Rightarrow \int \ln(1+x^2)\,dx = \ln(1+x^2)\,x - 2[1 - \arctan(x)] + C$$

+1.0

$\boxed{P2}$ ⓐ $\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\ln(N+i)\right]-\ln(N)$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\ln(N+i)\right]-N\cdot\frac{1}{N}\ln(N)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\ln(N+i)\right]-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\ln(N)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\left(\ln(N+i)-\ln(N)\right)$$

+1.0

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\left(\ln\left(1+\frac{i}{N}\right)\right)$$

+0.5

Usando $\Delta x_i=\frac{1}{N}$, $x_0=1$, $x_i=1+\frac{i}{N}$, $f(x)=\ln(x)$

+0.5

Se pueden definir otro x_i y otra $f(x)$ analoga

por ejemplo $x_i=\frac{i}{N}$, $f(x)=\ln(1+x)$

Cambia los límites de integración

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}f(x_i)\Delta x_i=\int_1^2\ln(x)\,dx$$

+0.5

$$\int_1^2 \ln(x)\,dx = x(\ln(x)-1)\Big|_1^2 = 2(\ln(2)-1) - 1(\ln(1)-1)$$

$$= 2\ln(2) - 1$$

+0.5

b) $$\lim_{N\to\infty} \frac{3}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{2i}{N}\right)^4 - \left(\frac{10i}{N}\right)^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left[2^4\left(\frac{i}{N}\right)^4 - 10^2\left(\frac{i}{N}\right)^2\right]\cdot 3 \cdot \frac{1}{N}$$

+1.0

Usando $x_0 = 0$, $\Delta x_i = \frac{1}{N}$, $x_i = \frac{i}{N}$

$$f(x) = \left[2^4 x^4 - 10^2 x^2\right]\cdot 3$$

+0.5

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{3}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{2i}{N}\right)^4 - \left(\frac{10i}{N}\right)^2 = \int_0^1 (2^4 x^4 - 10^2 x^2)\,3\,dx$$

+0.5

$$\int_0^1 (2^4x^4 - 10^2x^2)3\,dx = 3\cdot 2^4 \int_0^1 x^4\,dx - 3\cdot 10^2 \int_0^1 x^2\,dx$$

$$= 3\cdot 2^4 \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \cancel{3}\cdot 10^2 \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}}\Big|_0^1$$

$$= \frac{3 \cdot 2^4}{5} - 100$$

$+ 1.0$

P3. Sean $a \in \mathbb{N}$ finito y $f : [1, a] \to \mathbb{R}$ probar que f es integrable en $[1, a]$, con $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \notin \mathbb{N} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{N} \end{cases}$

Probaremos esto para intervalos de largo 1 y luego, usando eso, concluiremos lo pedido. Sea una particion equiespaciada del intervalo $[k, k+1]$

$P_{[k,k+1]} = \{k, k + \frac{1}{n}, k + \frac{2}{n}, .., k + \frac{i}{n}, ..., k + \frac{n-1}{n}, k + 1\} = \{x_0, x_1, x_2, ...x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$

+0.5

Observaciones: Notar que en el intervalo $[1, a]$ se tiene que $x < 2x$ y que $2x$ es creciente.

$M_i = 2x_i$ para cada $[x_{i-1}, x_i]$

+0.5

$m_i = 2x_{i-1}$ para cada $[x_{i-1}, x_i]$ menos $[x_0, x_1]$ y $[x_{n-1}, x_n]$, pues en estos intervalos el infimo es x_0 y x_n respectivamente.

+0.5

$$S(f, P_{[k,k+1]}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}(2k + \frac{2i}{n}) \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{2k}{n} + \frac{2i}{n^2}) = 2k + \frac{(n+1)}{n} = 2k + 1 + \frac{1}{n}$$

+0.5

$$s(f, P_{[k,k+1]}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=2}^{n-1}(2k + \frac{2i-2}{n}) \left(\frac{1}{n}\right) + k\frac{1}{n} + (k+1)\frac{1}{n}$$

$s(f, P_{[k,k+1]}) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{2k}{n} + \frac{2i}{n^2} - \frac{2}{n^2}) + \frac{2k+1}{n} - \frac{2k}{n} - \frac{2k+2}{n} + \frac{2}{n^2}$, los últimos 3 arreglan la sumatoria.

+1.0

$$s(f, P_{[k,k+1]}) = 2k + \frac{(n+1)}{n} - \frac{2}{n} - \frac{2k+1}{n} + \frac{2}{n^2} = 2k + 1 - \frac{2k+2}{n} + \frac{2}{n^2}$$

$$S(f, P_{[k,k+1]}) - s(f, P_{[k,k+1]}) = \frac{2k+3}{n} - \frac{2}{n^2}.$$

+1.0

Tomando el límite se concluye que $S(f, P_{[k,k+1]}) - s(f, P_{[k,k+1]}) \to 0$, por lo tanto es Riemann integrable en $[k, k + 1]$.

+0.5

Como k es arbitrario se tiene que f es integrable en $[1, 2]$, $[2, 3]$, ... , $[a - 1, a]$.

Finalmente por propiedad de la integral de Riemann si f es integrable en $[h, i]$ y en $[i, j]$, entonces es integrable en $[h, j]$.

+1.0

Por lo tanto uniendo todos los intervalos f es integrable en $[1, a]$.

+0.5

Nota extra: La suma superior de f entre $[1, a]$ seria igual a la suma de las $a-1$ sumas superiores, es decir:

$$S(f, P_{[1,a]}) = \sum_{k=1}^{a} S(f, P_{[k,k+1]}) = \sum_{k=1}^{a-1} 2k + 1 + \frac{1}{n} = (a-1)a + a - 1 + \frac{a-1}{n} = a^2 - 1 + \frac{a-1}{n} \to a^2 - 1$$

Esto es lo mismo que $\int_1^a 2x dx$, pues como vieron en clase sacar una cantidad finita de puntos no
afecta al valor de la integral.

Desarrollos equivalentes reciben asignaciones acorde a los argumentos de forma proporcional

P3 b)

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $a<b$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

decida si f es Riemann integrable y demuestre su respuesta.

f es Riemann integrable si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que

$$\left| s_P(f) - S_P(f) \right| < \varepsilon$$

+1.5

Sea $0 < \varepsilon < b-a$, supongamos que existe esta partición,

$$P = \{ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \}$$

+0.5

pero cada intervalo real tiene al menos un racional y un irra-
cional.

+1.5

Luego $s_P(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot 0$

$s_P(f) = 0$

1.0

y $S_P(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot 1 = (b-a)$

1.0

como $b-a \neq 0$ basta tomar

$\varepsilon < b-a$ $\divideontimes$

0.5