



**Control 2, MA-1002 Cálculo Diferencial e Integral  
Semestre 2021/2 (6 de Noviembre)**

**Recuerde que:** las evaluaciones del curso son de carácter estrictamente individual. Nuestra Escuela y Universidad cuenta con normas de convivencia y reglamentos que aplican a todas las actividades académicas en cualquier formato y soporte en que se realicen. Ustedes al ingresar a la Universidad de Chile adhieren a los valores y principios contenidos en estas normas y reglamentos y es su deber como estudiantes de esta comunidad el conocerlas y respetarlas.

En particular, se recuerda que el Título II del Código de Ética de la FCFM (versión revisada 2020) señala lo siguiente en su punto c): "La responsabilidad y la honestidad se expresan en el compromiso con el estudio y la rendición de evaluaciones a lo largo de la vida estudiantil, así como en la realización de la investigación y la docencia. En este sentido, los miembros de la comunidad se comprometen a no realizar actos contrarios a dichos valores como, por ejemplo, copiar, plagiar, falsificar documentos, suplantar la identidad de terceros en todas las actividades evaluativas y de producción de conocimiento que realicen, entre otras. Asimismo, se comprometen a no recurrir a ningún medio físico o virtual que posibilite dichos comportamientos impropios."

**P.1.** (a) Considere la función  $f(x) = x \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

(i) (2 pts.) Calcule  $f'(x)$  y encuentre intervalos de crecimiento, máximos y mínimos de  $f$  (si los hay).

(ii) (2 pts.) Calcule  $f''(x)$  y encuentre intervalos de convexidad y de concavidad. Encuentre (si los hay) todos los puntos de inflexión.

(b) (2 pts.) Sean  $g$  una función dos veces derivable en  $\mathbb{R}$  que satisface  $g(0) = g'(0) = 0$  y  $a > 0$ .

Aplique el TVM a la función auxiliar  $h(x) = g(x) - \left(\frac{x}{a}\right)^2 g(a)$  y su derivada para demostrar que  $\exists \xi \in (0, a)$  tal que  $\frac{a^2}{2} g''(\xi) = g(a)$ .

**P.2.** (a) (4 pts.) Considere la función  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Encuentre  $n \in \mathbb{N}^*$  y funciones escalonadas  $e^-, e^+: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  asociadas a la partición  $P = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}, \frac{n+1}{n}, \dots, \frac{2n}{n} \right\}$ , tales que:  $e^-(x) \leq f(x) \leq e^+(x)$  para todo  $x \in [0, 2]$  y

$$\int_0^2 (e^+ - e^-) \leq 10^{-3}$$

(b) (2 pts.) Demuestre que  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int \sin^{n+2}(x) = \frac{-1}{n+2} \cos(x) \sin^{n+1}(x) + \frac{n+1}{n+2} \int \sin^n(x) dx$$

**Tiempo de Trabajo: 2 horas**