

MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral

Profesores: Natalia Ruiz, Raúl Uribe, Cristián Reyes.



Control 2

1. Calcule las siguientes integrales y primitivas.

a) [2 puntos] $\int \frac{dx}{e^x + 1}$

b) [2 puntos] $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$

c) [2 puntos] $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4 + 3 \cos(x)}$

2. a) Considere la función $f : [0, 2]$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2, & \text{si } x \in (1, 2] \end{cases}$$

i) [1 punto] Para la partición $P = \{0, 6/7, 1, 8/7, 2\}$, calcule la suma inferior $s(f, P)$ y la suma superior $S(f, P)$.

ii) [2 puntos] Demuestre que la función f es Riemann integrable en el intervalo $[0, 2]$.

b) [3 puntos] Calcule el valor del límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times [\ln(n+k) - \ln(n)].$$

3. a) [3 puntos] Demuestre que $\int_0^{\pi} \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \pi \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$ (Indicación: Es posible que necesite usar la igualdad $\arccos(u) + \arccos(-u) = \pi$)

b) [3 puntos] Sea f derivable en todo \mathbb{R} , para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $g(x) = \int_x^{x+1} (x-t)f(t)dt$. Demuestre que si f es decreciente en todo \mathbb{R} , entonces $g''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (Indicación: Es posible que necesite usar TVM en el intervalo $[x, x+1]$ para f .)